第十一章 随机过程的基本知识

随机过程(Stochastic Process) 被认为是概率论的“动力学”部分(J. Neyman, 1960). 意思是说它的研究对象是随时间演变的随机现象

第一节 随机过程的概念和记号

例1：股票的价格

记t时刻股票的价格为$Y(t)$, 股票价格$Y(t)$随时间t的变化在不断变化；给定时刻t，股票价格$Y(t)$不可预测，可以认为是随机变量

则$\{Y(t),t>0\}$是一个随机过程

例2：随机游走Random Walk

研究一醉汉醉酒后的行走路线，t时刻他所在的位置记作$(X(t),Y(t))$,

则$\{(X(t),Y(t)),t>0\}$为一个二维随机过程

- 特点1：每一时刻t，这个位置是不确定的，有随机性，是随机变量
- 特点2：整个过程随时间t在不断变化

例3：排队问题

- 记$X(t)$表示$[0,t)$小时内通过柜台的人数，则通过柜台的人数$X(t)$随时间的增加在变化，固定t，$X(t)$为取值非负整数的随机变量，则$\{X(t),t>0\}$是一个随机过程

随机过程的定义

- 设 T 是一实数集, Ω是一个样本空间. 若对每个$t\in T$, $X(t,\omega)$都是定义在样本空间Ω上的一个随机变量,则称$\{X(t,\omega), t\in T\}$这一随机变量族为随机过程，简记为 $\{X(t), t\in T\}$

1、其中T 称为参数集、指标集或时间集

参数集可以是离散的，也可以是连续的

2、随机过程$X(t,\omega)$是关于$t\in T, \omega \in \Omega$的二元映射，即:

$$X(\cdot,\cdot): T\times\Omega \mapsto R.$$

注

(1) 固定 $t=t_1\in T$, $X(t_1)=X(t_1,\omega)$ 是一随机变量，称为在 t_1 时的状态，当$X(t_1)=x$时，也称$X(t)$ 为在$t=t_1$时刻过程处于状态 x. 故一个随机过程就是一族随机变量， 所以随机过程可以看作是多维随机变量的延伸

称 $X(t)$ 所有可能取值的全体为该过程的状态空间,记作S.

(2) 固定$\omega=\omega_1$,$X(t,\omega_1)$ 是关于t的普通函数，记为$X(t)$，称为样本函数或随机过程的一个实现，也称为一条轨道. 故一个随机过程就是一族样本函数

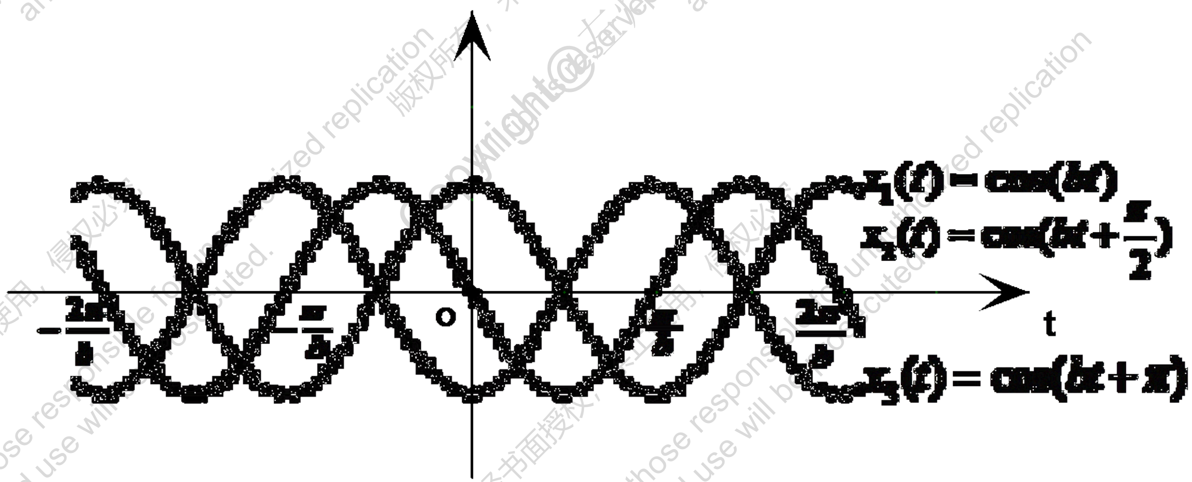
对随机过程$\{X(t), t\in T\}$ 进行了一次试验，是指在T上对过程进行了一次全程观察，其结果就是一个样本函数. 通常我们画的随机过程曲线示意图, 就是该过程的一个样本函数或一条轨道

例 随机过程$X(t)=a\cos(bt+\Theta)$，$t\in(-\infty,+\infty)$□ □ □ a和b是常数，Θ是服从$U(0,2\pi)$分布的随机变量，$X(t)$称为随机相位余弦波. 求

(1) Θ分别取0, $\pi/2$, π时的三条轨道；

(2) t分别为0.5, 2时的两个随机变量.

解: (1) Θ分别取0, $\pi/2$, π时的三条轨道 分别是



(2) t分别为0.5, 2时的两个随机变量分别是

$$X(1)=a\cos(0.5b+\Theta),\quad X(2)=a\cos(2b+\Theta)$$

第二节 随机过程的概率特性

- 随机变量的统计特性可以用它的分布来刻画.随机过程是一族随机变量, 它的统计特性也可以用类似的方法来刻画

（一）随机过程的分布函数族

- 对于固定的t, $X(t)$是一个随机变量，考虑$X(t)$的分布函数$F_t(x)=P\{X(t)\le x\}$□ 则称$F_t(x)$为随□ 过□ $X(t)$的一维分布函数

- 对于任意的t_1，$t_2 \in T$,随机变量$X(t_1)$与$X(t_2)$的联合分布函数:

$$F_{t_1,t_2}(x_1,x_2) = P\{X(t_1) \le x_1, X(t_2) \le x_2\}$$

则称 $F_{t_1,t_2}(x_1,x_2)$为随□ 过□ $X(t)$的二维分布函数

例1 设随机过程 $X(t)=te^{Y}$，$t>0$，其中Y服从参数为λ的指数分布，求 $X(t)$的一维分布函数.

解: Y的分布函数为 $F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-\lambda y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$

当$x>t$时，$X(t)$的分布函数为

$$F_t(x)=P\{X(t)\le x\}=P\{te^{Y}\le x\}$$

$$=P\{Y\le \ln\frac{x}{t}\}=F_Y(\ln\frac{x}{t})=1-(\frac{t}{x})^{\lambda}$$

$$F_t(x)=\begin{cases}1-(\frac{t}{x})^{\lambda} & x>t\\ 0 & x\le t\end{cases}\qquad t>0$$

对任意的$t_1,\ldots,t_n \in T$，定义随机过程$X(t)$的n维分布函数:

$$F_{t_1,\cdots,t_n}(x_1,\cdots,x_n)=P\{X(t_1)\le x_1,\cdots,X(t_n)\le x_n\}$$

则称$F_{t_1,\cdots,t_2}(x_1,\cdots x_n)$为随机过程$X(t)$的$n$维分布函数

有限维分布族具有:

对称性

$$F_{t_1,\ldots,t_n}(x_1,\ldots,x_n)=F_{t_{j_1},\ldots,t_{j_n}}(x_{j_1},\ldots,x_{j_n};)$$

相容性

$$F_{t_1,\ldots,t_m}(x_1,\ldots,x_m)=F_{t_1,\ldots,t_m,t_{m+1},\ldots,t_n}(x_1,\ldots,x_m,+\infty,\ldots,+\infty) \qquad m<n$$

一个随机过程完全取决于它的有限维分布

例2：设随机过程$X(t)=A\cos(t)$，t实数，其中A是随机变量，其分布律为：$P\{A=1\}=P\{A=2\}=P\{A=3\}=1/3$. 求

(1) $X(t)$的一维分布函数$F_{\pi/4}(x)$;

(2) 二维分布函数 $F_{0,\pi/3}(x_1,x_2)$

解: (1) 因为$X(\pi/4)=A\cos(\pi/4)=\frac{\sqrt{2}}{2}A$

$X(\frac{\pi}{4})$所有可能的取值为$\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1,\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2,\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 3$

$$P\{X(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}\}=P\{A=1\}=1/3$$

$$P\{X(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2\}=P\{A=2\}=1/3$$

$$P\{X(\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 3\}=P\{A=3\}=1/3$$

$$F_{\pi/4}(x)=\begin{cases}0 & x<\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2}\le x<\sqrt{2}\\ \frac{2}{3} & \sqrt{2}\le x<\frac{3\sqrt{2}}{2}\\ 1 & x\ge\frac{3\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

(2) $X(0) = A\cos(0) = A,\qquad X(\frac{\pi}{3}) = A\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{A}{2}$

$X(0)$所有可能取值为$1,2,3;\quad X(\pi/3)$的取值$1/2,1,3/2$

$$P\{X(0)=1, X(\pi/3)=1/2\}$$

$$= P\{A=1, A/2=1/2\}$$

$$= P\{A=1\} = 1/3$$

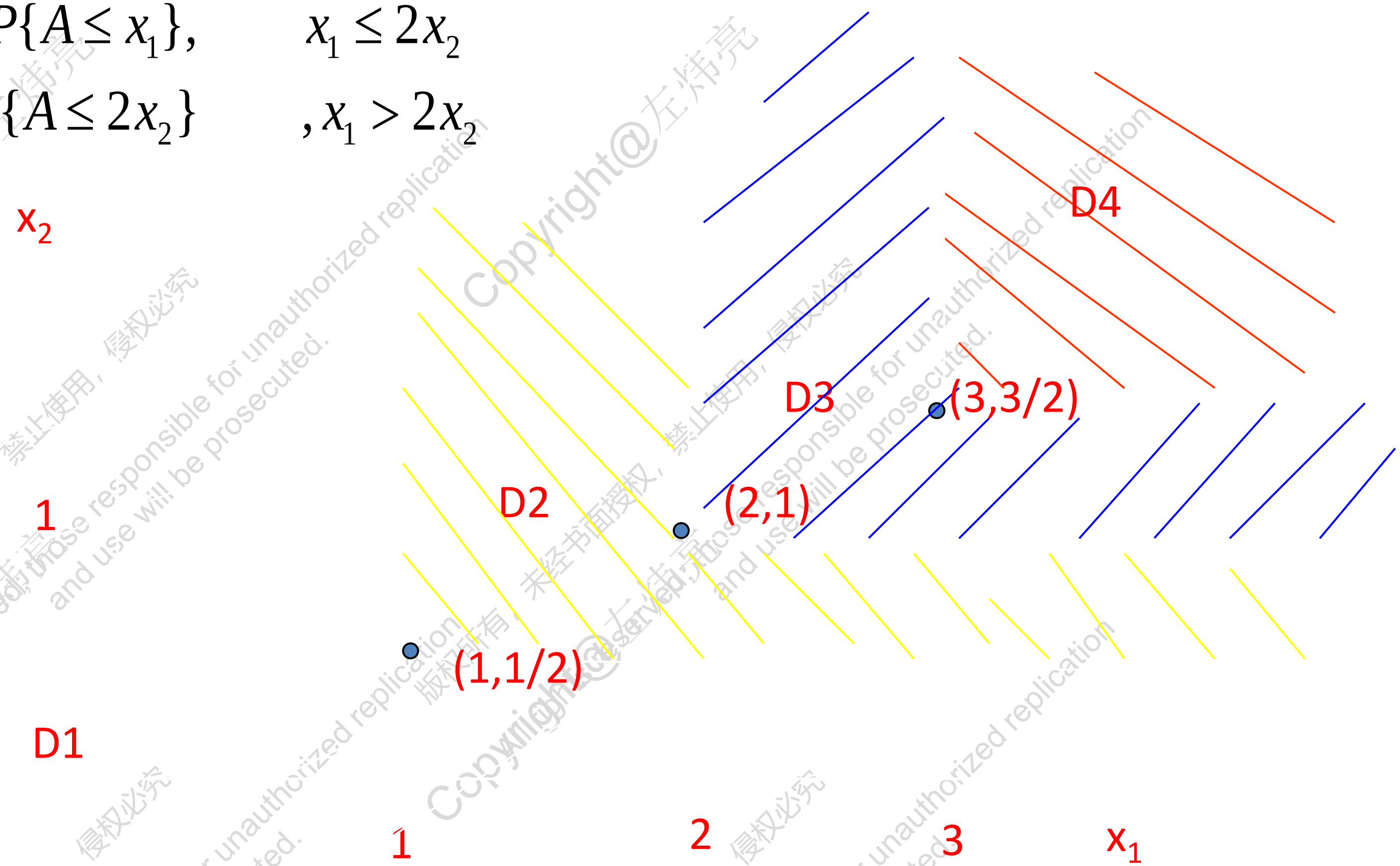
$$P\{X(0)=1, X(\pi/3)=1\}$$

$$= P\{A=1, A/2=1\}$$

$$= 0$$

$X(\pi/3)$ \ $X(0)$	1	2	3
1/2	1/3	0	0
1	0	1/3	0
3/2	0	0	1/3

$$F_{0,\pi/3}(x_1,x_2)=\begin{cases} P\{A\le x_1\}, & x_1\le 2x_2 \\ P\{A\le 2x_2\} & ,x_1>2x_2 \end{cases}$$



二维分布函数为

$$F_{0,\pi/3}(x_1,x_2)=\begin{cases} 0 & D1: x_1<1 \text{或} x_2<1/2 \\ \dfrac{1}{3} & D2: 1\le x_1<2, x_2\ge 1/2 \text{或} x_1\ge 1, 1/2\le x_2<1 \\ \dfrac{2}{3} & D3: 2\le x_1<3, x_2\ge 1 \text{或} x_1\ge 2, 1\le x_2<3/2 \\ 1 & D4: x_1\ge 3, x_2\ge 3/2 \end{cases}$$

例3：设随机过程X_T只有两条样本曲线

$$X(t,\omega_1)=k\cos t, X(t,\omega_2)=k\sin t \quad -\infty<t<\infty$$

其中k（$k>0$）为常熟，$P(\omega_1)=1/3$, $P(\omega_2)=2/3$，求的一维分布函数$F_0(x)$和二维分布函数$F_{0,\pi/2}(x_1,x_2)$

解: 由题意，随机变量$X(0)$服从亮点分布：$X(0)\sim\begin{pmatrix}0 & k\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$

$$F_0(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{2}{3}, & 0\le x<k,\\ 1, & x\ge k\end{cases}$$

类似的，二维随机向量$\left(X(0),X\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\sim\begin{pmatrix}(0,k) & (k,0)\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$

$$F_{0,\pi/2}(x_1,x_2)=\begin{cases}0 & x_1<\text{k或}x_2<k\\ \frac{1}{3} & x_1\ge k,0\le x_2<k\\ \frac{2}{3} & 0\le x_1<k,x_2\ge k\\ 1 & x_1\ge k,x_2\ge k\end{cases}$$

例4：设随机过程$X(t)=A+Bt,\ t\geq 0$，*其中A和B是独立同分布的标准正态随机变量*，*即*$A,B\sim N(0,1)$，求$X(t)$的一维和二维概率密度

解： 先求一维概率密度

$$EX(t)=EA+t.EB=0$$

$$DX(t)=DA+t^2DB=1+t^2$$

$$\Rightarrow\ X(t)\sim N(0,1+t^2)$$

求二维概率密度 $X(t_1)=A+Bt_1, X(t_2)=A+Bt_2$

$$EX(t_1)=0, EX(t_2)=0 \qquad DX(t_1)=1+t_1^2, DX(t_2)=1+t_2^2$$

$$\begin{aligned}&\mathbf{Cov}(X(t_1),X(t_2))\\&=E(X(t_1)X(t_2))-EX(t_1).EX(t_2)\\&=E((A+Bt_1)(A+Bt_2))=1+t_1t_2\end{aligned}$$

$$(X(t_1),\quad X(t_2))^T\sim N\left((0,0)^T,\ \begin{pmatrix}1+t_1^2 & 1+t_1t_2\\ 1+t_1t_2 & 1+t_2^2\end{pmatrix}\right)$$

第三节 随机过程的数字特征

1．均值函数 设随机过程$\{X(t), t\in T\}$

$$m(t)=E[X(t)],\ t\in T,$$

称为随机过程$X(t)$的均值函数.

说明

$m(t)$是$X(t)$的所有样本函数在时刻t的函数值的平均

它表示随机过程$X(t)$在时刻t的摆动中心

2．方差函数

随机过程$\{X(t),\ t\in T\}$的二阶中心矩

$$D(t)=D[X(t)]=E[(X(t)-m(t))^2]$$

称为随机过程$X(t)$的方差函数

说明 **标准差函数**

$D(t)$的平方根$\sigma(t)=\sqrt{D(t)}$

它表示$X(t)$在各个时刻t对于$m(t)$的偏离程度

3．自协方差函数

随机过程 $X(t)$ 在 $t_1,t_2\in T$ 的状态 $X(t_1)$ 和 $X(t_2)$

二阶中心混合矩

$$C(t_1,t_2)=E[(X(t_1)-m(t_1))(X(t_2)-m(t_2))]$$

称为随机过程 $X(t)$ 的自协方差函数，**简称协方差函数**

注　　当 $t_1=t_2=t\in T$，有

$$D(t)=C(t,t)=E[(X(t)-m(t))^2]$$

4. 互协方差函数

设 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是两个随机过程，

对任意 $t_1,t_2 \in T$，则

$$C_{XY}(t_1,t_2) = E[X(t_1) - m_X(t_1)][Y(t_2) - m_Y(t_2)]$$

称为随机过程 $X(t)$ 与 $Y(t)$ 的互协方差函数

其中

$$m_X(t_1) = E[X(t_1)]$$

$$m_Y(t_2) = E[Y(t_2)]$$

6. 自相关函数

对任意 $t_1, t_2 \in T$，$X(t_1)$ 和 $X(t_2)$ 的二阶原点混合矩

$$R(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$$

称为随机过程 $X(t)$ 的自相关函数.

简称相关函数

注

$$C(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - m(t_1)m(t_2)$$

当 $m(t) = 0$ 时，有 $R(t_1, t_2) = C(t_1, t_2)$

7．互相关函数

设 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是两个随机过程

对任意 $t_1, t_2 \in T$， 则

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)]$$

称为随机过程 $X(t)$ 与 $Y(t)$ 的互相关函数

注

$$C_{XY}(t_1, t_2) = R_{XY}(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_Y(t_2)$$

8．互不相关与相互独立

设 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 是两个随机过程

对任意 $t_1, t_2 \in T$ 有

$$C_{XY}(t_1, t_2) = 0$$

则称随机过程 $X(t)$ 与 $Y(t)$ 互不相关

注 若 若随机过程 $X(t)$ 与 $Y(t)$ 互不相关

则 $$R_{XY}(t_1, t_2) = m_X(t_1) m_Y(t_2)$$

即 $$E[X(t_1)Y(t_2)] = E[X(t_1)]E[Y(t_2)]$$

设$X(t),Y(t)$是定义于同一个样本空间S和同一个参数集T上的随机过程. 其相互独立的充要条件任意一个$n+m$维联合分布函数等于n维$X(t)$的分布函数乘以m维$Y(t)$的分布函数，即

$$F_{t_1,t_2,\ldots,t_n;t_1',t_2',\ldots,t_m'}(x_1,x_2,\ldots,x_n;y_1,y_2,\ldots,y_m)$$

$$=F_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(x_1,x_2,\ldots,x_n)F_{t_1',t_2',\ldots,t_m'}(y_1,y_2,\ldots,y_m)$$

小结

$X(t)$	$X(t)$、$Y(t)$
均值函数 方差函数 协方差函数 自相关函数	互协方差函数 互相关函数

例5: 设随机过程$X(t)=A\cos(t)$, t实数, 其中A是随机变量;
其分布律为：$P\{A=1\}=P\{A=2\}=P\{A=3\}=1/3$,
求$X(t)$的均值函数、自相关函数、协方差函数

解：均值函数

$$m(t)=E[X(t)]=E[A\cos(t)]=\cos(t)\,E(A)$$

$$E(A)=1\cdot(1/3)+2\cdot(1/3)+3\cdot(1/3)=2$$

故 $m(t)=2\cos(t)$

自相关函数

$R(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]$

$=E[A\cos(t_1)A\cos(t_2)]$

$=\cos(t_1)\cos(t_2)E(A^2)$

$=14/3\cos(t_1)\cos(t_2)$

协方差函数

$C(t_1,t_2) = \mathrm{Cov}(X(t_1),X(t_2))$

$=E[X(t_1)X(t_2)]-E[X(t_1)]E[X(t_2)]$

$=R(t_1,t_2)-E[X(t_1)]E[X(t_2)]$

$=14/3\cos(t_1)\cos(t_2) -2\cos(t_1)2\cos(t_2)$

$=2/3\cos(t_1)\cos(t_2)$

例6： 随机相位正弦波$X(t)=a\cos(\omega_0 t+\Phi)$,其中$a$, ω_0 是大于零的常数，随机变量Φ服从[0,2π] 上的均匀分布，求$X(t)$的均值函数以及自相关函数

解： $m(t) = E[a\cos(\omega_0 t + \Phi)]$

$$= \int a\cos(\omega_0 t + \phi) f(\phi) d\phi = \int_0^{2\pi} a\cos(\omega_0 t + \phi)\frac{1}{2\pi} d\phi$$

$$= \frac{a}{2\pi}\sin(\omega_0 t + \phi) \Big|_0^{2\pi} = 0$$

$$R_X(t_1,t_2) = E(X(t_1)X(t_2)) = E\{a\cos(\omega_0 t_1 + \Phi) a\cos(\omega_0 t_2 + \Phi)\}$$

$$= \int_0^{2\pi} a^2 \cos(\omega_0 t_1 + \phi)\cos(\omega_0 t_2 + \phi)\frac{1}{2\pi} d\phi$$

$$= \frac{a^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\{\cos(\omega_0(t_1+t_2)+2\phi)+\cos(\omega_0(t_1-t_2))\}d\phi$$

$$= \frac{a^2}{4\pi}\left[\frac{1}{2}\sin(\omega_0(t_1+t_2)+2\phi)+\phi\cos(\omega_0(t_1-t_2))\right]_0^{2\pi} = \frac{a^2}{2}\cos(\omega_0(t_1-t_2))$$

例7：$X(t)$，$Y(t)$已知，设$W(t)=X(t)+Y(t)$，试求$W(t)$的均值函数及自相关函数

解： $m_W(t)=E(W(t))=E\{X(t)+Y(t)\}$

$$=E(X(t))+E(Y(t))=m_X(t)+m_Y(t)$$

$$R_W(t_1,t_2)=E(W(t_1)W(t_2))=E\{[X(t_1)+Y(t_1)][X(t_2)+Y(t_2)]\}$$

$$=E\{X(t_1)X(t_2)+X(t_1)Y(t_2)+X(t_2)Y(t_1)+Y(t_1)Y(t_2)\}$$

$$=R_X(t_1,t_2)+R_{XY}(t_1,t_2)+R_{YX}(t_1,t_2)+R_Y(t_1,t_2)$$

例8 设两个随机过程 $X(t)=Ut^2$，$Y(t)=Ut^3$

其中 U 是随机变量且 $D(U)=5$

试求它们的互协方差函数

解： $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的均值函数

$$m_X(t)=E[Ut^2]=t^2E[U]$$

$$m_Y(t)=E[Ut^3]=t^3E[U]$$

所以 $X(t)$ 和 $Y(t)$ 的互协方差函数

$$C_{XY}(t_1,t_2)=E\{[X(t_1)-t_1^{\ 2}E(U)][Y(t_2)-t_2^{\ 3}E(U)]\}$$

$$=t_1^{\ 2}t_2^{\ 3}E[(U-E(U))^2]=t_1^{\ 2}t_2^{\ 3}D(U)$$

例9：设随机过程X_T只有两条样本曲线

$$X(t,\omega_1)=a\cos t, X(t,\omega_2)=-a\cos t \quad -\infty<t<\infty$$

其中a（a>0）为常熟，$P(\omega_1)$=2/3, $P(\omega_2)$=1/3，求X_T的期望和相关函数

解：数学期望

$$m_X(t)=EX(t)=a\cos t\,.\frac{2}{3}+(-a\cos t).\frac{1}{3}=\frac{a}{3}\cos t$$

相关函数为

$$R_X(t_1,t_2)=E[X(t_1)X(t_2)]$$
$$=(a\cos t_1\,.a\cos t_2).\frac{2}{3}+(-a\cos t_1).(-a\cos t_2).\frac{1}{3}=a^2\cos t_1\cos t_2$$

第四节 随机过程的基本类型

1. 按参数集和状态空间分类

参数集分类

离散参数

参数集T的是一个可列集T={0，1，2，…}

连续参数

参数集T的是一个不可列集 $T=\{t\mid t\geq 0\}$

状态空间分类

离散状态

连续状态

$X(t)$

取值是离散的

取值是连续的

参数T状态S分类

- T离散、S离散
- T离散、S非离散（连续）
- T非离散（连续）、S离散
- T非离散（连续）、S非离散（连续）

2．按过程的性质特点分类

统计特性分类

- 二阶矩过程
  - Gauss过程
  - 正交增量过程
  - 宽平稳过程
- 独立增量过程
- Markov过程

(1) 二阶矩过程

设$\{X(t), t\in T\}$是随机过程，对于每一个$t\in T$，二阶矩$E[X^2(t)]$都存在，则称$X(t)$为二阶矩过程

由Cauchy-Schawze不等式

$$\{E[X(t_1)X(t_2)]\}^2 \le E[X^2(t_1)]E[X^2(t_2)]$$

二阶矩过程的均值函数和相关函数都存在.

Gauss过程

若随机过程 $\{X(t), t\in T\}$的每一个有限维分布都是正态分布, 即对任意正整数$n\geq 1$, 和n个不同的$t_1,t_2,\ldots,t_n\in T$, n维随机变量$\{X(t_1),X(t_2),\ldots,X(t_n)\}$的概率密度为

$$f_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}|C|^{-\frac{1}{2}}\exp\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})^{\mathrm{T}}C^{-1}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{m})\}$$

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{m}=(m_X(t_1),\cdots,m_X(t_n))^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} C_X(t_1,t_1) & \cdots & C_X(t_1,t_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_X(t_n,t_1) & \cdots & C_X(t_n,t_n) \end{pmatrix}$$为对称正定阵,

则称 $\{X(t), t\in T\}$为正态过程或高斯过程

正交增量过程

若随机过程 $\{X(t)\,,\, t\geq 0\}$ 为二阶矩过程，且对任意的 $0\leq t_1<t_2\leq t_3<t_4$,恒有

$$E[(X(t_2)-X(t_1))(X(t_4)-X(t_3))]=0,$$

则称 $\{X(t)\,,\, t\in T\}$ 为正交增量过程

正交增量过程的性质

若随机过程 $\{X(t), t\ge 0\}$为正交增量过程，规定$X(0)=0$，则当$t_2>t_1\ge 0$

$$R(t_1,t_2)=E[(X(t_1)\,X(t_2)]$$

$$=E\{[X(t_1)-X(0)][X(t_2)-X(t_1)+X(t_1)]\}$$

$$=E\{[X(t_1)-X(0)][X(t_2)-X(t_1)]\}+E\{[X(t_1)-X(0)]X(t_1)\}$$

$$=E[X^2(t_1)]$$

正交增量性

令$g(t_1)=E[X^2(t_1)]$, 则当$t_2>t_1$时，$R(t_1,t_2)=g(t_1)$；
当$t_1>t_2$时，$R(t_1,t_2)=g(t_2)$。一般地，$R(t_1,t_2)=g(t_1\wedge t_2)$

正交增量过程的性质

当$t_2 > t_1 \geq 0$

$$g(t_2)-g(t_1)=E[X^2(t_2)]- E[X^2(t_1)]$$

$$=E[X^2(t_2)] - 2E[(X(t_1)\ X(t_2)]+E[X^2(t_1)]$$

$$=E[X(t_2)-X(t_1)]^2$$

故 $g(t)$是t的单调非降函数

（2）独立增量过程

1. 定义 设$\{X(t), t\geq 0\}$为随机过程,对任意有限个

$$t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n$$,且

$$X(t_2) - X(t_1)，\ X(t_3) - X(t_2)，\ \cdots，\ X(t_n) - X(t_{n-1})$$

是相互独立的，则称$X(t)$为独立增量过程

进一步地，若独立增量过程$X(t)$的任意增量$X(s+t)$-X(s)($s\geq 0,t>0$)的概率分布与s无关，则称$X(t)$ 为平稳独立增量过程

注：

独立增量过程并没有要求二阶矩存在，故其未必是二阶矩过程，反之亦然

二阶矩存在的独立增量过程有泊松过程和布朗运动

例1 设$\{X(n), n=0,1,2,\cdots\}$是相互独立

的随机变量序列，令 $S(i)=\sum_{n=0}^{i} X(i)$

则 $\{S(i), i=0,1,2,\cdots\}$是一个独立增量过程

证： 对于任意的正整数$0\le n_0<n_1<\ldots<n_m$,增量

$$S(n_1)-S(n_0),\ S(n_2)-S(n_1),\ \cdots,\ S(n_m)-S(n_{m-1})$$

$$X(n_0+1)+\cdots+X(n_1),\ X(n_1+1)+\cdots X(n_2),\ \cdots,X(n_{m-1}+1)+\cdots X(n_m)$$

是相互独立的，故$\{S(i),i=0,1,2,\ldots\}$是一个独立增量过程

例2 求独立增量过程 $\{X(t), t \ge 0\}$ 的协方差函数与相关函数，设 $X(0)=0$

解: 当$0 \le s < t$时，

$$E[X(s)X(t)] = E\{[X(s)-X(0)][X(t)-X(s)+X(s)]\}$$

$$= E\{[X(s)-X(0)]\cdot E[X(t)-X(s)]+E[X^2(s)]\}$$

$$= E[X(s)]\cdot\{E[X(t)]-E[X(s)]\}+E[X^2(s)]$$

$$= E[X(s)]\cdot E[X(t)]-E^2[X(s)]\}+E[X^2(s)]$$

$$= m(s)m(t)+D(s)$$

当$0 \le t < s$时，

$$E[X(s)X(t)] = m(s)m(t)+D(t)$$

故相关函数

$$R(s,t) = E[X(s)X(t)]$$

$$= m(s)m(t)+D(s \wedge t)$$

协方差函数

$$C_X(s,t) = Cov(X(s), X(t))$$

$$= E[X(s)X(t)] - E[X(s)]E[X(t)]$$

$$= D(s \wedge t)$$

三、Markov过程

1. 定义

设$\{X(t), t \geq 0\}$为随机过程,对任意有限个

$t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n$,以及任意 s>0 ($t_n+s \in T$),恒有

$$P\{X(t_n+s) \leq x \mid X(t_1)=x_1, \ldots, X(t_n)=x_n\} = P\{X(t_n+s) \leq x \mid X(t_n)=x_n\},$$

x，$x_1, x_2, \ldots, x_n \in R$ 成立，

则称$X(t)$为Markov过程，简称为马氏过程

三、Markov过程

Markov过程具有无后效性，即已知现在，将来与过去无关

马尔可夫过程

参数集T
状态S
分类

- $T=\{0,1,2,\ldots\}$、S为可列集 —— 马尔可夫链（马氏链）
- $T=[0,+\infty)$、S为可列集 —— 连续参数马氏链
- T、S均为不可列集 —— 一般状态空间上的马氏过程

四、泊松过程

1. 计数过程定义

令$N(t)$表示(0，t]内某随机事件A出现的次数，若$N(t)$满足以下性质：

（1）$N(t)$取值为非负整数；

（2）若$t>s\geq 0$,则$N(t)\geq N(s)$;

（3）若$t>s\geq 0$,过程的增量$N(t)-N(s)$

表示在事件$(s, t]$内随机事件A出现的次数；

则称$\{N(t), t\geq 0\}$为计数过程

四、泊松过程

2. Poisson过程 定义（一）

令$\{N(t), t \ge 0\}$为计数过程，若它满足条件

（1）$N(0)=0$；

（2）是独立增量过程；

（3）对任意的 $s \ge 0$, $t \ge 0$，

$$P\{N(t+s)-N(s)=k\}=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}, k=0,1,2,\ldots$$

则称$\{N(t), t \ge 0\}$为强度为λ的泊松过程

四、泊松过程

2. Poisson过程 定义（二）

令$\{N(t), t \geq 0\}$为计数过程，若它满足条件

（1）$N(0)=0$;

（2）是独立增量过程;

（3）对任意的 $t\geq 0$，及充分小的$\Delta t>0$，

$$P\{N(t+\Delta t)-N(t)=1\}=\lambda \Delta t+o(\Delta t)$$

$$P\{N(t+\Delta t)-N(t)\geq 2\}=o(\Delta t)$$

则称$\{N(t), t \geq 0\}$为强度为λ的泊松过程

四、泊松过程

注

（1）定义（一）是从宏观上描述过程增量的概率分布；

（2）定义（二）是从微观上描述过程增量的概率分布；

$$P\{N(t+\Delta t)-N(t)=1\}=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

短时间内发生一次事件的概率与时间间隔成比例

$$P\{N(t+\Delta t)-N(t)\geq 2\}=o(\Delta t)$$

短时间内发生2次以上事件的概率非常小

（3）定义（一）和定义（二）是等价的

（4）以上定义的泊松过程称为齐次泊松过程

证明：两个定义的一致性

定义（一）推定义（二）

$$P\{N(s+\Delta t)-N(s)=1\}=\frac{e^{-\lambda\cdot\Delta t}(\lambda\cdot\Delta t)^{1}}{1!}$$

$$=\lambda\Delta t(1+o(\Delta t))=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$$

$$P\{N(s+\Delta t)-N(s)\geq 2\}=1-P_0-P_1$$

$$=1-\frac{e^{-\lambda\Delta t}(\lambda\Delta t)^{0}}{0!}-\frac{e^{-\lambda\Delta t}(\lambda\Delta t)^{1}}{1!}$$

$$=1-e^{-\lambda\Delta t}(1+\lambda\Delta t)=1-(1-\lambda\Delta t+o(\Delta t))(1+\lambda\Delta t)$$

$$=1-(1-\lambda^2(\Delta t)^2+o(\Delta t))=o(\Delta t)$$

由定义（二）推定义（一）

$$P_n(t) = P\{N(t) = n\}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P\{N(t+\Delta t) - N(t) = k\} = P_0 + P_1 + P_{\geq 2}$$

$$= P\{N(t+\Delta t) - N(t) = 0\} + \lambda \Delta t + o(\Delta t) \quad = 1$$

$$\Rightarrow P\{N(t+\Delta t) - N(t) = 0\} = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

$$P_0(t+\Delta t) = P\{N(t+\Delta t) = 0\} = P\{N(t) = 0, N(t+\Delta t) - N(t) = 0\}$$

$$\overset{\text{独立增量}}{=} P\{N(t) = 0\} P\{N(t+\Delta t) - N(t) = 0\}$$

$$= P_0(t)\{1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)\}$$

即：$P_0(t+\Delta t) - P_0(t) = -\lambda\Delta t P_0(t) + o(\Delta t)$

所以 $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{P_0(t+\Delta t) - P_0(t)}{\Delta t} = -\lambda P_0(t)$

即：$\dfrac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda P_0(t)$

$$P_0(0) = P\{N(0) = 0\} = 1$$

解微分方程，得$P_0(t) = e^{-\lambda t}$

即$P\{N(t) = 0\} = e^{-\lambda t}$

$$P_n(t+\Delta t)=P\{N(t+\Delta t)=n\}=P\{N(t)+N(t+\Delta t)-N(t)=n\}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}P\{N(t)=n-k,N(t+\Delta t)-N(t)=k\}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}P\{N(t)=n-k\}P\{N(t+\Delta t)-N(t)=k\}$$

$$=P\{N(t)=n\}P\{N(t+\Delta t)-N(t)=0\}$$

$$+P\{N(t)=n-1\}P\{N(t+\Delta t)-N(t)=1\}$$

$$+\sum_{k=2}^{n}P\{N(t)=n-k\}P\{N(t+\Delta t)-N(t)=k\}$$

$$= P\{N(t)=n\}P\{N(t+\Delta t)-N(t)=0\}$$
$$+P\{N(t)=n-1\}P\{N(t+\Delta t)-N(t)=1\}$$
$$+\sum_{k=2}^{n} P\{N(t)=n-k\}P\{N(t+\Delta t)-N(t)=k\}$$

$$= P_n(t)(1-\lambda\Delta t+o(\Delta t))+P_{n-1}(t)(\lambda\Delta t+o(\Delta t))+\sum_{k=2}^{n} P_{n-k}(t)P\{N(t+\Delta t)-N(t)=k\}$$

又： $$\sum_{k=2}^{n} P_{n-k}(t)P\{N(t+\Delta t)-N(t)=k\} \le \sum_{k=2}^{+\infty} P_{n-k}(t)P\{N(t+\Delta t)-N(t)=k\}$$
$$\le \sum_{k=2}^{+\infty} P\{N(t+\Delta t)-N(t)=k\}=o(\Delta t)$$

$$P_n(t+\Delta t)=P_n(t)(1-\lambda\Delta t+o(\Delta t))+P_{n-1}(t)(\lambda\Delta t+o(\Delta t))+o(\Delta t)$$

$$P_n(t+\Delta t)=P_n(t)(1-\lambda\Delta t+o(\Delta t))+P_{n-1}(t)(\lambda\Delta t+o(\Delta t))+o(\Delta t)$$

$$P_n(t+\Delta t)-P_n(t)=-\lambda\Delta t P_n(t)+\lambda\Delta t P_{n-1}(t)+o(\Delta t)$$

$$\frac{P_n(t+\Delta t)-P_n(t)}{\Delta t}=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t)+o(1)$$

取极限：$P_n'(t)=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t)$

初始条件：$P_n(0)=P\{N(0)=n\}=0(n\geq 1)$

为解方程，对n作数学归纳

$n=0$时，$P_0(t)=P\{N(t)=0\}=e^{-\lambda t}=\dfrac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^0}{0!}$成立，

设$n-1$时，$P_{n-1}(t)=P\{N(t)=n-1\}=\dfrac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$

解微分方程，$P_n'(t)=-\lambda P_n(t)+\lambda\dfrac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$

由$P_n(0)=P\{N(0)=n\}=0(n\geq 1)$

得$P_n(t)=\dfrac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}$，

由增量平稳性，

$$P\{N(s+t)-N(s)=n\}=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}$$

泊松过程的数字特征

因为$N(t)= N(t)-N(0) \sim P(\lambda t)$,

所以$E[N(t)]=E[N(t)-N(0)]= \lambda t$

$D[N(t)]=D[N(t)-N(0)]= \lambda t$

λ =E[$N(t)$]/t表示单位时间内事件A的平均出现次数

泊松分布是二阶矩过程

当$s<t$时，

$$Cov(N(s), N(t))=Cov(N(s)-N(0), N(t)-N(s)+N(s))$$

$$= Cov(N(s)-N(0), N(t)-N(s))+ Cov(N(s), N(s))$$

$$=D(N(s))= \lambda s$$

当$s<t$时， $Cov(N(s), N(t))= \lambda t$

故$C(s, t)= \lambda min\{s,t\}$

泊松过程的数字特征

$$R(s, t)= Cov(N(s), N(t))+E[N(s)]\ E[N(s)]$$

$$= \lambda min\{s,t\} +\lambda^2 st$$

泊松流

令 S_n表示事件A第n次出现发生的时刻， $S_0=0$，

则$\{S_n>t\}=\{N(t)<\text{n}\}$；

S_n的分布函数

$$F_{S_n}(t)=P(S_n\le t)=1-P(S_n>t)=1-P(N(t)<n)$$

$$=\sum_{k=n}^{+\infty}P\{N(t)=k\}=\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$$

对t求导，得

$$f_{S_n}(t)=\begin{cases}\dfrac{\lambda(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}e^{-\lambda t}, & t>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$T_n=S_n-S_{n-1}$表示事件第n次出现与第n-1次出现的时间间隔。

故$T_1=S_1 \sim Exp(\lambda)$

$$P(T_2 > t \mid T_1 = s) = P(\text{在}(s, s+t]\text{内事件A不出现}|T_1 = s)$$

$$= P(N(s+t) - N(s) = 0)$$

$$= P(N(t) = 0) = e^{\lambda t}$$

故$T_2 \sim Exp(\lambda)$，且T_2与T_1独立.重复上述步骤可知：

$$f_{T_i}(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

定理1、强度为λ 的泊松过程的时间间隔$\{T_n\}$是相互独立的随机变量，且服从参数为λ 的同一个指数分布

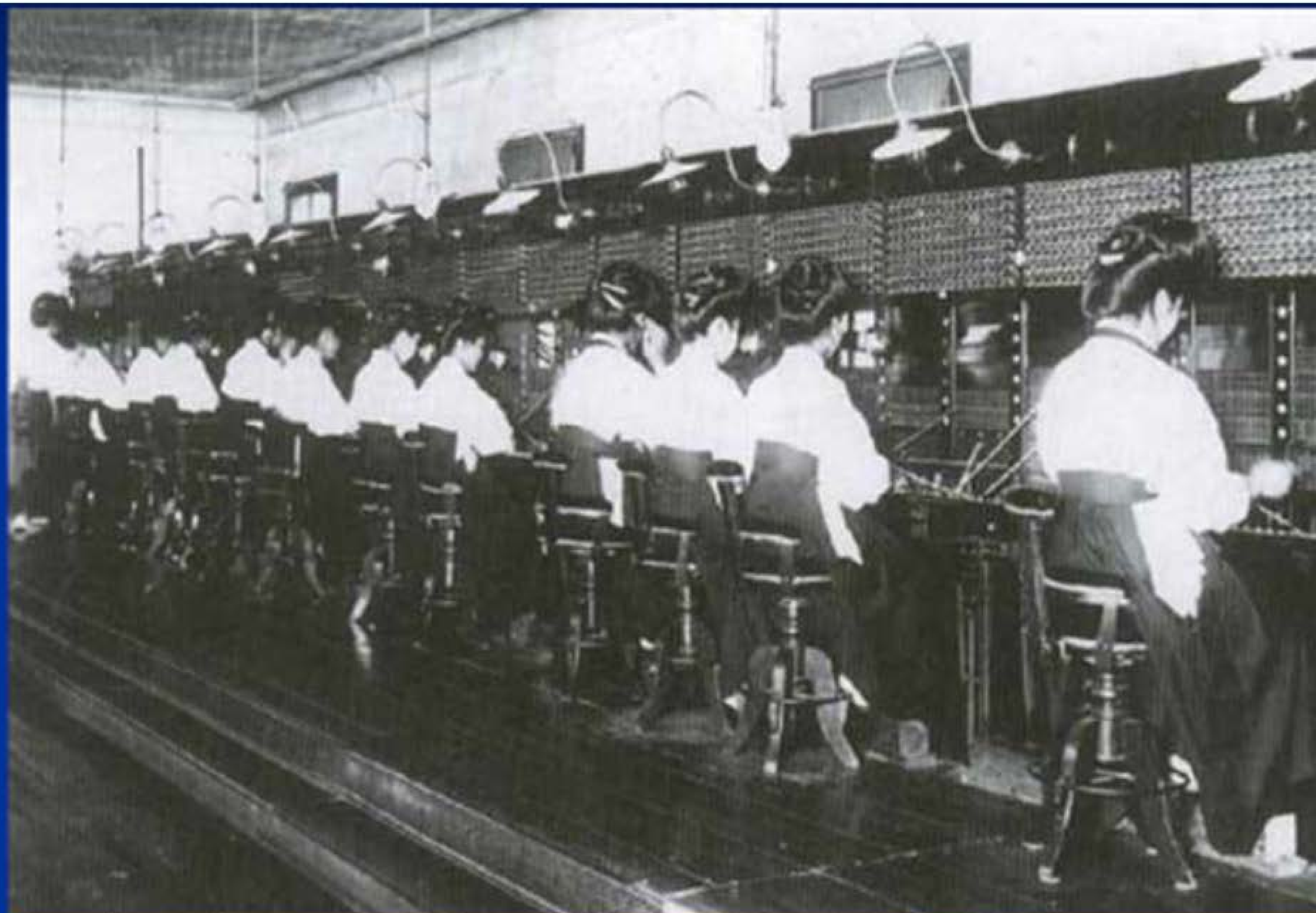
定理2、设$\{N(t), t\geq 0\}$是计数过程，若时间间隔$\{T_n\}$是相互独立的随机变量，且服从参数为λ同一个指数分布，则$\{N(t), t\geq 0\}$是强度为 λ的泊松过程

定理1和定理2刻画了泊松过程的本质，即：

一个计数过程是泊松过程，当且仅当时间间隔相互独立且服从同一个指数分布

泊松过程举例

考虑某一电话交换台在某段时间接到的呼叫。令 $N(t)$ 表示电话交换台在 $[0, t]$ 时间内收到的呼叫次数，则 $\{N(t), t \geq 0\}$ 是一个泊松过程。



泊松过程举例

例　设N(t)为$[0,t)$ 时段内某电话交换台收到的呼叫次数，N(t)的状态空间为$\{0,1,2,\cdots\}$ ，且具有如下性质：

1）N(0)=0，即初始时刻未收到任何呼叫；

2）在任意多个不相重叠的时间间隔内收到的呼叫次数相互独立；

3）在[t, t+Δt]这段时间收到的呼叫次数只与时间间隔Δt有关，而与时间起点t无关；

4）在足够小的时间间隔内

$$\begin{cases} P(\Delta t\text{时间内有一次呼叫}) = \lambda \Delta t + o(\Delta t) \\ P(\Delta t\text{时间内收到2次及其以上呼叫}) = o(\Delta t) \end{cases}$$

可见$\{N(t), t \ge 0\}$是强度λ 的泊松过程。

泊松过程举例

考虑来到某火车站售票窗口购买车票的旅客。若记$N(t)$为时间$[0, t]$内到达售票窗口的旅客数，则$\{ N(t), t \geq 0 \}$是一个泊松过程。

泊松过程举例

考虑机器在 $(t, t+h]$ 内发生故障这一事件。若机器发生故障，立即修理后继续工作，则在 $(t, t+h]$ 内机器发生故障而停止工作的事件数构成一个随机点过程，它可以用泊松过程来描述。

泊松过程举例

例 顾客到达某商店服从参数λ= 4人/小时的泊松过程，已知商店上午9：00开门，试求到9：30时仅到一位顾客，而到11：30时总计已达5位顾客的概率

解： 设$N(t)$表示在时间t时到达的顾客数

$$P\{N(0.5)=1, N(2.5)=5\}$$

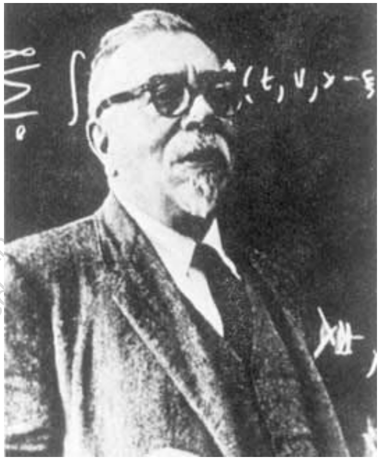
$$= P\{N(0.5)-N(0)=1, N(2.5)-N(0.5)=4\}$$

$$= \frac{(4\times 0.5)^1}{1!}e^{-4\times 0.5}\cdot\frac{(4\times 2)^4}{4!}e^{-4\times 2}$$

$$\approx 0.0155$$

布朗（Brown）运动

英国植物学家Brown最早发现了布朗运动；
Einstein在1905首先给出了物理学解释；
Wiener在1918年构造了布朗运动的数学模型；故布朗运动也称Wiener过程



布朗运动是指悬浮在液体或气体中的微粒所做的永不停息的无规则运动

将坐标系的原点取在花粉的起始位置，花粉在 t 时刻所处位置的横坐标和纵坐标分别用 $X(t)$, $Y(t)$ 表示。首先它在起始时刻位于原点；又在各个不相交时间间隔中花粉沿 x 方向的位移是互不影响，相互独立的；且在每一段时间间隔中沿x 方向位移服从正态分布，由于左移与右移距离的概率分布是对称的，所以数学期望为零，而刻划位移分散程度的方差正比于时间间隔的长度

布朗运动的定义

定义：设$\{W(t),\ t\geq 0\}$ 为随机过程，若它满足

（1）$W(0)=0$；

（2）是独立增量过程；

（3）增量$W(t)-W(s)\sim N(0,|t-s|\sigma^2),\ \sigma>0$；

则称$\{W(t),\ t\geq 0\}$ 是参数为σ^2□ 布朗运动或Wiener过程.

如果$\sigma=1$，则称为标准布朗运动

注：第(1)条并不是必须的. 如果$W(0)=x$，则称$\{W(t),t\geq 0\}$为始于x的布朗运动，记为$W^x(t)$

布朗运动的性质

（1）$\{W(t),t\geq 0\}$是平稳独立增量过程;

（2） 对每个$t>0$，$W(t)$ 服从正态分布$N(0, \sigma^2 t)$.

且$\{W(t),t\geq 0\}$为正态过程

（3） $m_W(t)=0$, $C_W(s, t)=R_W(s, t)=\sigma^2\min(s, t)(s, t\geq 0)$

证明（1）由定义中的条件（2）和（3）可得性质（1）.

（2）对每个$t>0$， $W(t)=W(t)-W(0) \sim N(0, \sigma^2 t)$,

由$W(0)=0$，得： $W(t) \sim N(0, \sigma^2 t)$

布朗运动的性质

证明$\{W(t),t\ge 0\}$为正态过程，

即证对任意的自然数n，以及n个时刻

$0\le t_1<t_2<\ldots<t_n$,$(W(t_1),W(t_2),\ldots,W(t_n))$ 的联合密度为正态分布，

充要条件是对任意n个实数$a_1<a_2<\ldots<a_n$, $\sum_{i=1}^{n} a_i W(t_i)$ 服从正态分布

而由$W(t_i)\sim N(0,\sigma^2 t_i)$ 得：$\sum_{i=1}^{n} a_i W(t_i)\sim N(0,\sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma^2)$

故$\{W(t),t\ge 0\}$为正态过程

布朗运动的性质

（3）由$W(t) \sim N(0, \sigma^2 t)$得：

$$m_w(t)=E[W(t)]=0;\ D_w[W(t)]=\sigma^2 t$$

故$R_w(s, t)=C_w(s, t)=\mathrm{Cov}(W(s),W(t))$

$$=\mathrm{Cov}(W(s)-W(0),W(t)-W(s)+W(s)) \quad (s<t)$$

$$=\mathrm{Cov}(W(s)-W(0),W(t)-W(s))+D_w(W(s))$$

$$=\sigma^2 s$$

独立增量过程，协方差为0

同理，当$t<s$时，$R_w(s, t)= C_w(s, t)= \sigma^2 t$

故$C_w(s, t)=R_w(s, t)=\sigma^2\min(s, t)\ (s, t\geq 0)$

例： 设$\{W(t),\ t\geq 0\}$是参数为σ^2□ 布朗运动，$a>0$是常数，试证明 $X(t)=W(t+a)-W(a),\ t\geq 0$ 是布朗运动

证：(1) $X(0)=W(0+a)-W(a)=0$

(2) 对有限个$0<t_1<t_2<\ldots<t_n\in T$，有$a<a+t_1<a+t_2<\ldots<a+t_n$则：

$X(t_2)-X(t_1)=W(t_2+a)-W(t_1+a)$; $X(t_3)-X(t_2)=W(t_3+a)-W(t_2+a),\ldots,$

$X(t_n)-X(t_{n-1})=W(t_n+a)-W(t_{n-1}+a),$

由$W(t)$ 是布朗运动，知

$W(t_2+a)-W(t_1+a)$; $W(t_3+a)-W(t_2+a),\ldots,W(t_n+a)-W(t_{n-1}+a)$相互独立，

故$X(t)$是独立增量过程；

（3） $X(s)-X(t)=W(s+a)-W(t+a)\sim N(0,|t-s|\,\sigma^2),$

综上，$\{X(t),\ t\geq 0\}$是参数为σ^2□ 布朗运动